Площадь под графиком

Пусть функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ непрерывна. *Разбиением* отрезка $[a,b]$ называется набор $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ точек этого отрезка. *Нижней и верхней интегральными суммами* функции f по разбиению $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ называются соответственно суммы $s(f,\sigma) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \min\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ и $S(f,\sigma) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \max\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Если числа $\sup\limits_{\sigma} s(f,\sigma)$ и $\inf\limits_{\sigma} S(f,\sigma)$ определены и равны между собой, то площадь под графиком функции f определяется как равная им.

1. Докажите, что для любых двух разбиений σ_1, σ_2 верно неравенство $s(f,\sigma_1) \leqslant S(f,\sigma_2)$.

2. Докажите, для любой последовательности $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ разбиений таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{i=\overline{1,n}} (x_i - x_{i-1}) = 0$, верно равенство $\lim\limits_{n\to+\infty} (S(f,\sigma_n) - s(f,\sigma_n)) = 0$.

Из этих двух утверждений следует, что для любой непрерывной функции f верно равенство $\sup\limits_{\sigma} s(f,\sigma) = \inf\limits_{\sigma} S(f,\sigma)$, т. е. определена площадь под графиком. Пусть теперь функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена, а максимумы и минимумы заменим на супремумы и инфимумы, если определённая таким же образом (ориентированная) площадь существует, она называется *определённым интегралом* и обозначается $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Докажите, что определённый интеграл существует у любой монотонной функции.

4. Докажите, что определённый интеграл существует, если множество точек разрыва его можно покрыть счётным набором интервалов со сколь угодно малой суммарной длиной.

Формула Ньютона-Лейбница

Функция F называется *первообразной* функции f, если верно равенство $F'(x) = f(x)$.

5. Докажите равенство $\left(\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'_x = f(x)$

6. Найдите первообразную функции $f(x) = \cos(2x)$.

7. Найдите первообразную функции $f(x) = 2^{2x+2}$.

8. Докажите, что, если F – первообразная функции f на некотором промежутке, то у f есть бесконечно много первообразных и они все имеют вид $F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$.

9. Формула Ньютона-Лейбница. Пусть F – первообразная функции f, докажите, что $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Введём обозначение $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) \overset{\text{опр}}{=} \int\limits_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$.

10. Интегрирование по частям. Функции f и g непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Докажите равенство $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x)$.

11. Замена переменной. Пусть $g\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ – непрерывно дифференцируемое отображение такое, что $g(\alpha) = a$ и $g(\beta) = b$. Докажите, что для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ верно равенство $\int\limits_\alpha^\beta f(g(x))\,\mathrm{d}g(x) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

12. Вычислите $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1^a+2^a+\ldots+n^a}{n^{a+1}}$ при $a \geqslant 0$.

13. Вычислите $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{n}{(2n)^2}\right)$.

14. Формула Тейлора. Функция f имеет $n + 1$ непрерывную производную на $[x_0, x]$. Докажите равенство:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i\,!}(x - x_0)^i + \frac{1}{n\,!}\int\limits_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\mathrm{d}t.$$